كلـــــــية العلوم
قسم الرياضيات

امثلة متنوعة
على
نظرية الفروض الاحصائية

مثال 1: شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية يدعى صاحب الخيوط الجديدة أن متوسط قوة تحمل الخيط **15** كجم بانحراف معياري نصف كيلو جرام .
ولاختيار صحة إدعاء الصانع أخذت عينة عشوائية من **50** خيط وتم اختيارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة **14.8** كجم فهل يمكننا تأييد إدعاء المدير (استخدام درجة ثقة **99%**)

الحل

يمكن صياغة الحل في الخطوات التالية :

1 ـ صياغة الفرض الإحصائي

$$H_0: \quad \mu = 15$$

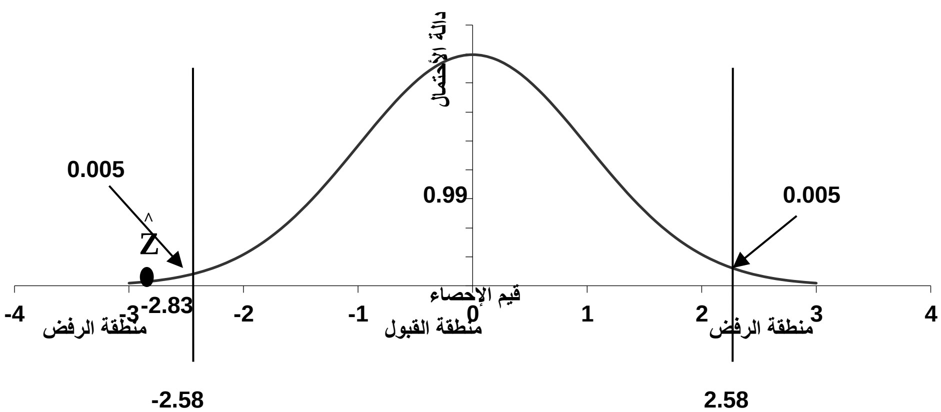
حيث $\mathbf{H_0}$ هو فرض العدم ـ أي افتراض عدم وجود اختلاف بين المتوسط الحقيقي وبين المتوسط الذي يدعيه الصانع وفى هذه الحالة يمكن افتراض أن الفرض البديل هو :

$$H_1: \quad \mu \neq 15$$

2 ـ أجراء الاختيار الإحصائي:

أ- لهذا نبحث عن إحصاء معين نعتبر أحد تقديرات المعلمة $\boldsymbol{\mu}$ هذا الإحصاء هو $\bar{\mathrm{X}}$ وكما نعلم أن من نظرية الحد المركزية فأن : $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$ هي دالة في $\bar{\mathrm{X}}$ وتتبع التوزيع المعتدل القياسي وذلك باعتبار فرض العدم صحيحا .

ب- عند درجة ثقة **99%** وباستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع المعتدل القياسي يمكن تحديد منطقة القبول أو الرفض .



ج- نحسب قيمة Z المشاهدة من بيانات العينة نجد أنها $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$

حيث $n = 50, \quad \sigma = 0.5, \quad \mu_0 = 15, \quad \bar{X} = 14.8$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{14.8 - 15}{0.5/\sqrt{50}} = -2.83$$

3 ـ اتخاذ القرار :نجد أن قيمة Z المشاهدة أقل من -2.58 (وهى أقل قيمة في منطقة القبول) أي أن Z المشاهدة تقع في منطقة الرفض ولهذا فأن القرار هو :

"رفض H_0"

ونستنتج من ذلك أن متوسط قوة تحمل الخيط μ لا تساوى **15** كجم حيث أن قيمة المشاهدة تقع في الجانب الأيسر لمنطقة الرفض ـ بل أكثر من ذلك يمكننا استنتاج أن μ أقل من **15** كجم .

مثال 2: يرغب أحد المصانع في التعاقد علي شراء سبائك من الألمونيوم يكون متوسط سمكها يساوي **0.05** بوصة وانحراف معياري **0.01** بوصة . ولتحقيق هذا الفرض قام المصنع بتسلم عينة مكونة من **100** سبيكة من أحد الموردين لفحصها فوجد أن متوسط سمكها يساوي **0.048** بوصة فهل يمكن للمصنع الإقدام علي الشراء من هذا المورد إذا كانت إدارة المصنع ترغب في اتخاذ القرار عند مستوي معنوية **95%** .

الحل

البيانات المعطاة في هذا المثال هي كما يلي :

$$\mathbf{n = 100 \quad , \quad \overline{X} = 0.048 \quad , \quad \alpha = 0.05 \quad , \quad \sigma = 0.01}$$

1 ـ الفرض العد مي : $\mathbf{H_0 : \mu = 0.05}$ (متوسط سمك السبيكة يساوي **0.05**) .

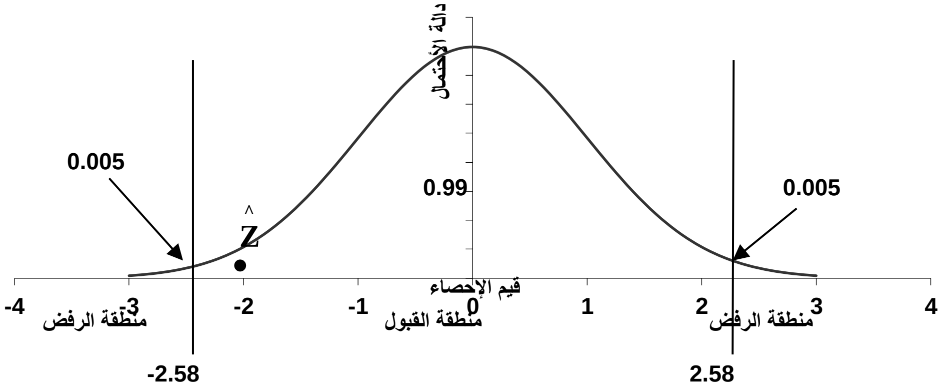
2 ـ الفرض البديل : $\mathbf{H_1 : \mu \neq 0.05}$ (متوسط سمك السبيكة لا يساوي **0.05**) .

3 ـ الإحصائية التي ستستخدم في الاختبار هي $\mathbf{\overline{X} = 0.048}$.

4 ـ مستوي المعنوية $\mathbf{\alpha = 0.05}$.

5 ـ Z المحسوبة بافتراض صحة فرض العدم :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0.048 - 0.05}{0.01/\sqrt{100}} = \frac{-0.002}{0.001} = -2$$



القرار : بمقارنة Z المحسوبة نجد أن Z تقع في منطقة الرفض ولذلك يتم رفض فرض العدم $\mathbf{H_0}$. وعلي ذلك يكون قرار المصنع هو عدم الشراء من هذا المورد .

في بعض الأحيان يكون من المطلوب اختيار الفرض القائل بأن متوسط المجتمع μ يساوى قيمة معينة μ_0 وذلك في مقابل الفرض البديل

$$\mathbf{H_1 \quad : \quad \mu < 15}$$

أو

$$\mathbf{H_1 \quad : \quad \mu > 15}$$

مثال 3: تدعي شركة لتعبئة السكر آليا أن متوسط النقص في أوزان الأكياس يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط **32** جم و انحراف معياري **26** جم . ولكي تتحقق جمعية حماية المستهلك من صحة هذا الإدعاء تم فحص **38** كيس من الأكياس المعبأة بواسطة الشركة فوجد أن متوسط الفاقد في هذه العينة **45** جم . فهل يمكن في ضوء هذه المعلومات القول أن متوسط النقص في الأكياس المعبأة بواسطة الشركة أكبر من المتوسط الذي أعلنته الشركة ؟ حدد الإجابة عند مستوي **0.05**.

الحل

البيانات المعطاة في هذا المثال هي :

$$n = 38, \quad \sigma = 26, \quad \alpha = 0.05, \qquad \mu_0 = 32, \;\; \overline{X} = 45$$

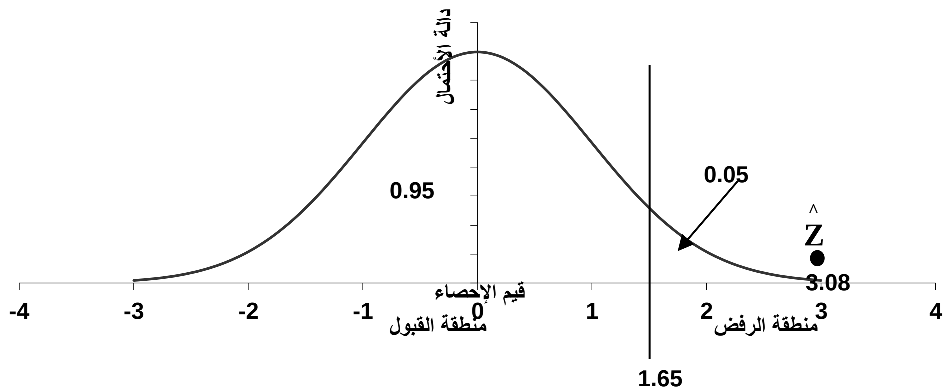
1 ـ الفرض العد مي : $\mathbf{H_0 : \mu = 32}$ (متوسط الفاقد يساوي **32**) .

2 ـ الفرض البديل : $\mathbf{H_1 : \mu > 32}$ (متوسط الفاقد أكبر من **32**) .

3 ـ الإحصائية التي ستستخدم في الاختبار هي $\mathbf{\overline{X} = 45}$.

4 ـ مستوي المعنوية $\mathbf{\alpha = 0.05}$ و الفرض البديل علي الصورة $\mathbf{H_1 : \mu > 32}$ و بالتالي فإن الاختبار ذو طرف واحد يمين .

5 ـ باستخدام جداول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن منطقتي القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



6 ـ Z المحسوبة بافتراض صحة فرض العدم :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{45 - 32}{26/\sqrt{38}} = 3.08$$

<u>القرار :</u>

حيث أن Z تقع في منطقة الرفض فأننا نرفض الفرض العد مي الذي ينص علي أن متوسط الفاقد يساوي **32** جم ونقبل الفرض البديل القائل أن متوسط الفاقد اكبر من **32** جم.

مثال 4 : ترغب شركة لبيع الأدوات الكهربائية في اختبار صحة الفرض الذي ينص علي أن العمر الافتراضي لنوع معين من الصمامات الكهربية أقل من **100** ساعة تشغيل . لإجراء هذا الاختبار تم اختيار عينة عشوائية مكونة من **16** صمام من هذا النوع فوجد أن متوسط عمر الصمام في العينة هو **96** بانحراف معياري **8** ساعة . فهل يمكن في ضوء هذه البيانات قبول افتراض الشركة عند مستوي معنوية **0.05**.

الحل

مع العلم بأن σ غير معلومة ، البيانات المعطاة في هذا المثال هي :

$$\mathbf{n = 16 \quad , \quad S = 8 \quad , \quad \alpha = 0.05 \quad , \quad \mu_0 = 100 \quad , \quad \overline{X} = 96}$$

والمطلوب التحقق من صحة الفرض بأن $\mu < 100$

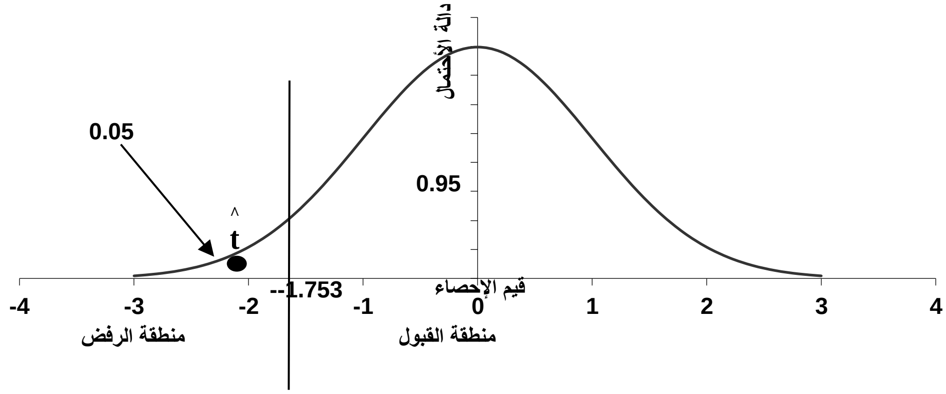
1 ـ الفرض العد مي : $H_0 : \mu = 100$.

2 ـ الفرض البديل : $H_1 : \mu < 100$.

3 ـ الإحصائية التي ستستخدم في الاختبار هي $\overline{X} = 96$.

4 ـ مستوي المعنوية $\alpha = 0.05$ و الفرض البديل علي الصورة $H_1 : \mu < 100$ و بالتالي فإن الاختبار ذو طرف واحد يسار .

5 ـ σ غير معلومة و $n = 16 < 30$ وبالتالي نستخدم جداول توزيع t نجد أن منطقتي القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



6 ـ t المحسوبة بافتراض صحة فرض العدم :

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{96 - 100}{8/\sqrt{16}} = -2$$

القرار : حيث أن t المحسوبة تساوي -2 أقل من -1.753 وبالتالي فإنها تقع في منطقة الرفض أي أننا نرفض الفرض العد مي الذي ينص علي أن العمر الافتراضي للصمامات أقل من **100** ساعة .

مثال 5: في دراسة إحصائية لقياس مستوي التحصيل في المدارس الحكومية و المدارس الخاصة تم اختيار عينة من **50** طالب من طلبة المدارس الحكومية وعينة مكونة من **40** طالب من طلبة المدارس الخاصة . وتم إجراء اختبار موحد للمجموعتين فوجد أن متوسط درجات الطالب في المدارس الحكومية يساوي **74** درجة و متوسط درجات الطالب في المدارس الخاصة يساوي **78** درجة . فإذا علم أن الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في المدارس الحكومية هو **7** درجات و في المدارس الخاصة **8** درجات . فهل يمكن القول في ضوء هذه البيانات بأن هناك اختلاف جوهري (معنوي) بين مستوي تحصيل طلبة المدارس الحكومية و طلاب المدارس الخاصة عند مستوي معنوية **0.05** .

الحل

من بيانات هذا المثال $n_1 = 50, n_2 = 40, \overline{X}_1 = 74, \overline{X}_2 = 78, \sigma_1 = 7, \sigma_2 = 8, \alpha = 0.05$

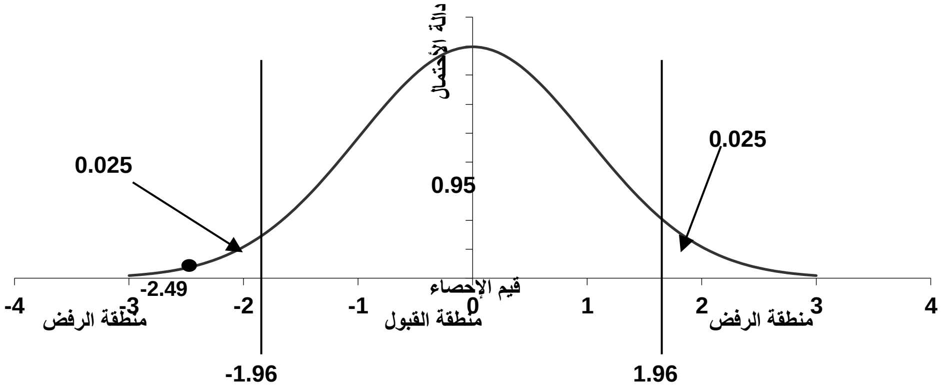
وحيث أن σ_1, σ_2 معلومة فإن :

الفرض العدم : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (لا يوجد فرق بين مستوي التحصيل) .

الفرض البديل : $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (مستوي التحصيل مختلف) .

الإحصائية المستخدمة $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ و التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي القياسي .

بمعلومية مستوي المعنوية و الفرض البديل H_1 فإن الاختبار ذو طرفين وتكون مناطق القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



الاختبار الإحصائي : بافتراض صحة الافتراض العدم فإن

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}=\frac{74-78}{\sqrt{\frac{49}{50}+\frac{64}{40}}}=\frac{-4}{1.61}=-2.49$$

القرار : حيث أن Z تقع في منطقة الرفض العدم فأننا نستطيع القول أن هناك فرق معنوي بين مستوي تحصيل الطلاب .

مثال 6 : في دراسة لأحد الأندية الرياضية عن أثر ممارسة الأنشطة الرياضية غلي أوزان اللاعبين . تم اختيار عينة عشوائية من **50** لاعب من الممارسين للأنشطة فوجد أن متوسط وزن ألاعب في العينة هو **67.5** كجم بانحراف معياري **2.8** كجم ، كما تم اختيار عينة عشوائية مكونة من **50** لاعب من غير الممارسين للأنشطة فوجد أن متوسط وزن ألاعب في العينة هو **68.2** كجم بانحراف معياري **2.5** كجم . فهل توافق في ضوء هذه البيانات علي صحة النتيجة التي توصل أليها مدير النادي علي أن وزن ألاعب غير الممارس للأنشطة اكبر من وزن ألاعب الذي يمارس الأنشطة الرياضية . حدد إجابتك بدرجة ثقة **95%** .

الحل

من بيانات هذا المثال $\mathbf{n_1=50, n_2=50, \overline{X}_1=67.5, \overline{X}_2=68.2, \sigma_1=2.8, \sigma_2=2.5, \alpha=0.05}$

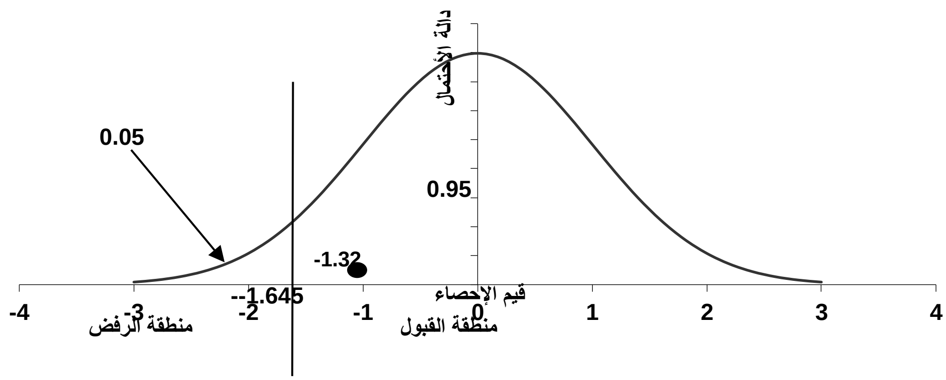
نلاحظ هنا أن σ_1,σ_2 غير معلومة كما أن $\mathbf{n_1+n_2>30}$ لذلك نستخدم التوزيع الطبيعي القياسي في جراء الاختبار كما يلي :

الفرض العدم : $\mathbf{H_0:\mu_1=\mu_2}$ (لا يوجد فرق بين أوزان اللاعبين) .

الفرض البديل : $\mathbf{H_1:\mu_1<\mu_2}$ (متوسط وزن المجموعة الأولي أقل من متوسط وزن المجموعة الثانية) .

الإحصائية المستخدمة $\overline{X}_1,\overline{X}_2$ و التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي القياسي .

بمعلومية مستوي المعنوية و الفرض البديل H_1 فإن الاختبار ذو طرف واحد يسار وتكون مناطق القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



بافتراض صحة العدم

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} = \frac{67.5 - 68.2}{\sqrt{\frac{2.8^2}{50} + \frac{2.5^2}{50}}} = \frac{-0.7}{\sqrt{0.2818}} = -1.32$$

<u>القرار :</u> حيث أن z تقع في منطقة قبول الفرض العدم فأننا نقبل الفرض العدم الذي ينص علي عدم وجود اختلاف معنوي بين متوسط أوزان المجموعتين أي أن النتيجة التي توصل أليها مدير النادي غير صحيحة .

<u>مثال7 :</u> لدراسة مستوي ذكاء الطلبة و الطالبات في إحدى الجامعات تم اختيار عينة عشوائية مكونة من **10** طلاب و عينة أخرى مكونة من **8** طالبات و اعطيت للمجموعتين اختبار ذكاء واحد وكانت الدرجات التي حصل عليها الطلاب و الطالبات كما يلي :

Degrees of boys	12	11	8	14	16	10	9	17	18	15
Degrees of girls	14	15	12	9	13	14	11	8		

فإذا علمت أن شئون الطلاب قررت انه لا يوجد اختلاف (فرق) بين تباين درجات ذكاء الطلاب و الطالبات . فهل يمكن القول في ضوء هذه البيانات أن مستوي ذكاء الطلاب اكبر من مستوي ذكاء الطالبات وذلك عند مستوي معنوية **0.05** .

<u>الحل</u>

من بيانات هذا المثال $\mathbf{n_1 = 10, n_2 = 8, \alpha = 0.05}$ σ_1, σ_2 غير معلومة .

ولذلك باستخدام توزيع **t** في الاختبار نجد أن :

<u>الفرض العدم :</u> $\mathbf{H_0 : \mu_1 = \mu_2}$ (لا يوجد فرق بين مستوي ذكاء الطلاب ومستوي ذكاء الطالبات) .

<u>الفرض البديل :</u> $\mathbf{H_1 : \mu_1 > \mu_2}$ (مستوي ذكاء الطلاب أكبر من مستوي ذكاء الطالبات) .

يتعين علينا هنا حساب $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ و الانحراف المعياري المشترك المقدر من العينيتين باستخدام العلاقات

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} \quad , \quad \overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2}$$

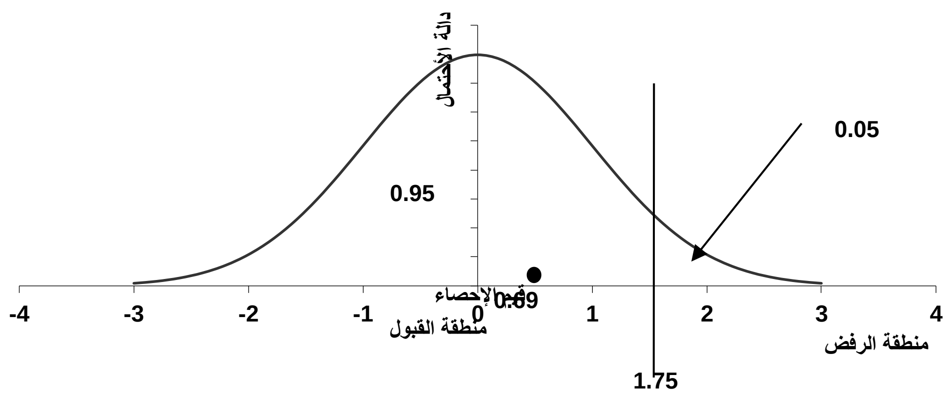
$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(X_1 - \overline{X}_1\right)^2 + \sum\left(X_2 - \overline{X}_2\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$\overline{X}_1$	$(X_1 - \overline{X}_1)$	$(X_1 - \overline{X}_1)^2$	$\overline{X}_1$	$(X_2 - \overline{X}_2)$	$(X_2 - \overline{X}_2)^2$
12	-1	1	14	2	4
11	-2	4	15	3	9
8	-5	25	12	0	0
14	1	1	9	-3	9
16	3	9	13	1	1
10	-3	9	14	2	4
9	-4	16	11	-1	1
17	4	16	8	-4	16
18	5	25			
15	-2	4			
130	0	110	96	0	44

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{130}{10} \qquad , \qquad \overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{96}{8}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X_1 - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_2 - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{110 + 44}{16}} = 3.1$$

بمعلومية مستوي المعنوية و الفرض البديل H_1 , وباستخدام توزيع $t_{(16,0.05)}$ أي بدرجة حرية **16** مستوي المعنوية **0.05** فإن الاختبار ذو طرف واحد يمين وتكون مناطق القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



بافتراض صحة العدم

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S^2\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{13 - 12}{3.1\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} = \frac{1}{3.1*0.47} = 0.69$$

القرار : حيث أن $\hat{t}$ المحسوبة تقع في منطقة قبول الفرض العدم فأننا نقبل الفرض العدم الذي ينص علي عدم وجود اختلاف معنوي بين مستوي ذكاء الطلبة و مستوي ذكاء الطالبات . أو بعبارة أخرى فاننا نرفض الإدعاء بأن مستوي ذكاء الطلبة أكبر من مستوي ذكاء الطالبات وذلك بدرجة ثقة **95%** .